

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathématiques : applications et interprétation

Niveau supérieur

Épreuve 2

9 mai 2023

Zone A après-midi | Zone B matin | Zone C après-midi

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

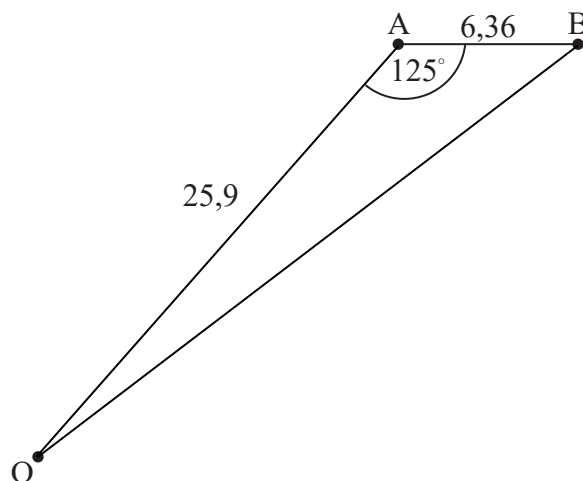
1. [Note maximale : 13]

Le diagramme montre des points, vus du haut, dans un parc, à un moment précis dans le temps.

La distance entre deux arbres, situés aux points A et B, est de 6,36 m.

Odette joue au football dans le parc et se tient au point O, tel que $OA = 25,9$ m et $\widehat{OAB} = 125^\circ$.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Calculez l'aire du triangle AOB.

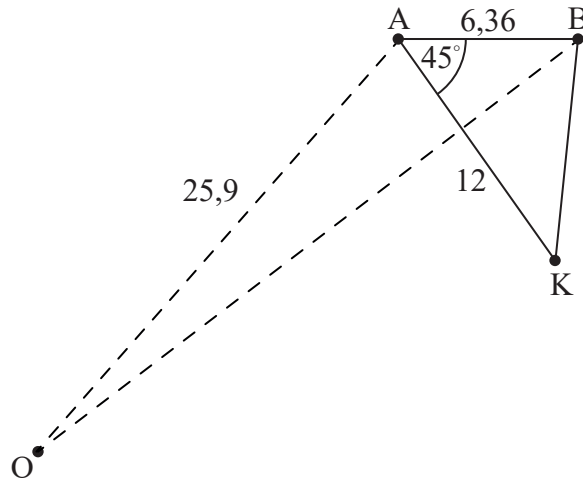
[3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Khemil, l'ami d'Odette, se tient au point K, de sorte qu'il est à 12 m de A et $\widehat{KAB} = 45^\circ$.

la figure n'est pas à l'échelle

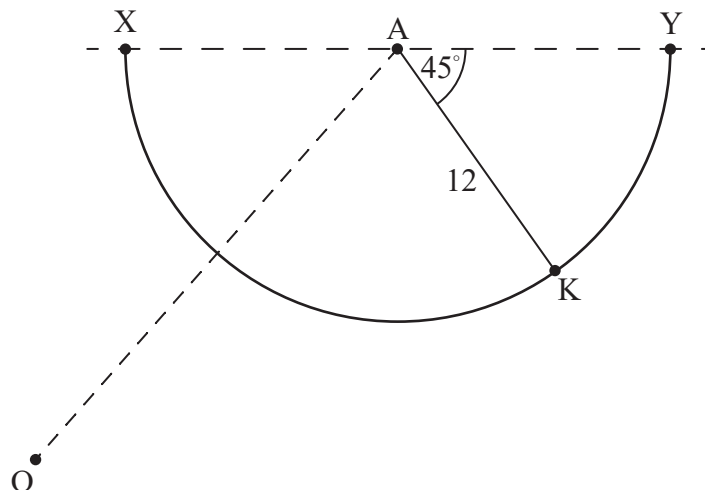


(b) Calculez la distance entre Khemil et le point B.

[3]

XY est un chemin semi-circulaire dans le parc dont le centre est A et tel que $\widehat{KAY} = 45^\circ$. Khemil se tient sur le chemin et le ballon d'Odette est au point X. Ceci est illustré dans le diagramme ci-dessous.

la figure n'est pas à l'échelle



La longueur $KX = 22,2$ m, $\widehat{KAX} = 53,8^\circ$ et $\widehat{OKX} = 51,1^\circ$.

(c) Trouvez qui d'Odette ou de Khemil est plus proche du ballon.

[4]

Khemil court le long du chemin semi-circulaire pour ramasser le ballon.

(d) Calculez la distance parcourue par Khemil.

[3]

2. [Note maximale : 12]

Un scientifique mène une expérience sur la croissance d'une certaine espèce de bactéries.

La population de bactéries, P , peut être modélisée par la fonction

$$P(t) = 1200 \times k^t, \quad t \geq 0,$$

où t est le nombre d'heures écoulées depuis le début de l'expérience et k est une constante positive.

- (a) (i) Écrivez la valeur de $P(0)$.
- (ii) Interprétez ce que cette valeur signifie dans ce contexte. [2]

3 heures après le début de l'expérience, la population de bactéries est de 18 750.

- (b) Trouvez la valeur de k . [2]
- (c) Trouvez la population de bactéries 1 heure et 30 minutes après le début de l'expérience. [2]

Le scientifique mène une deuxième expérience avec une autre espèce de bactéries. La population de cette espèce, S , peut être modélisée par la fonction

$$S(t) = 5000 \times 1,65^t, \quad t \geq 0,$$

où t est le nombre d'heures écoulées depuis le début des deux expériences.

- (d) Trouvez la valeur de t lorsque les deux populations de bactéries sont égales. [2]

Il faut 2 heures et m minutes pour que le nombre de bactéries dans la deuxième expérience atteigne 19 000.

- (e) Trouvez la valeur de m , en donnant votre réponse sous la forme d'une valeur entière. [4]

3. [Note maximale : 16]

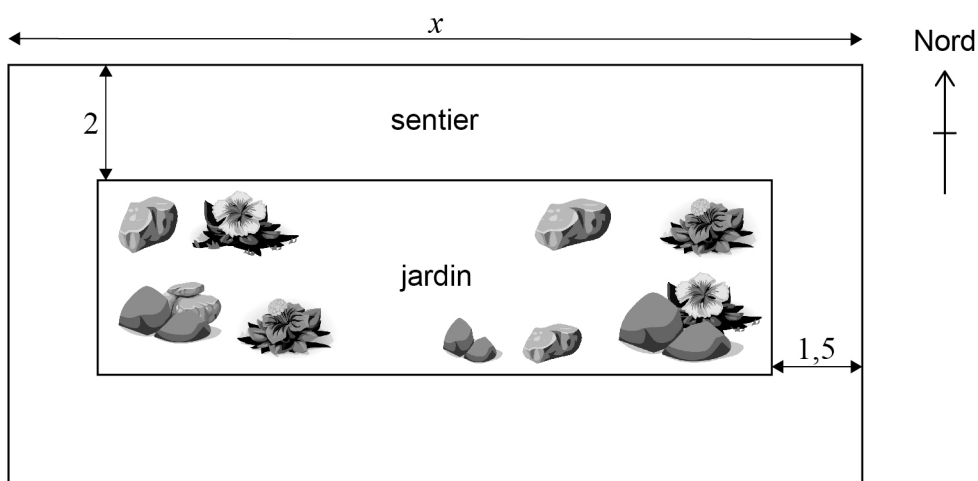
Un certain parc est composé d'un jardin rectangulaire dont l'aire est de $A \text{ m}^2$, ainsi que d'un sentier en béton qui l'entoure. L'aire totale du parc est de 1200 m^2 .

La largeur du sentier au nord et au sud du parc est de 2 m.

La largeur du sentier à l'ouest et à l'est du parc est de 1,5 m.

La longueur du parc (le long des côtés nord et sud) est de x mètres, $3 < x < 300$.

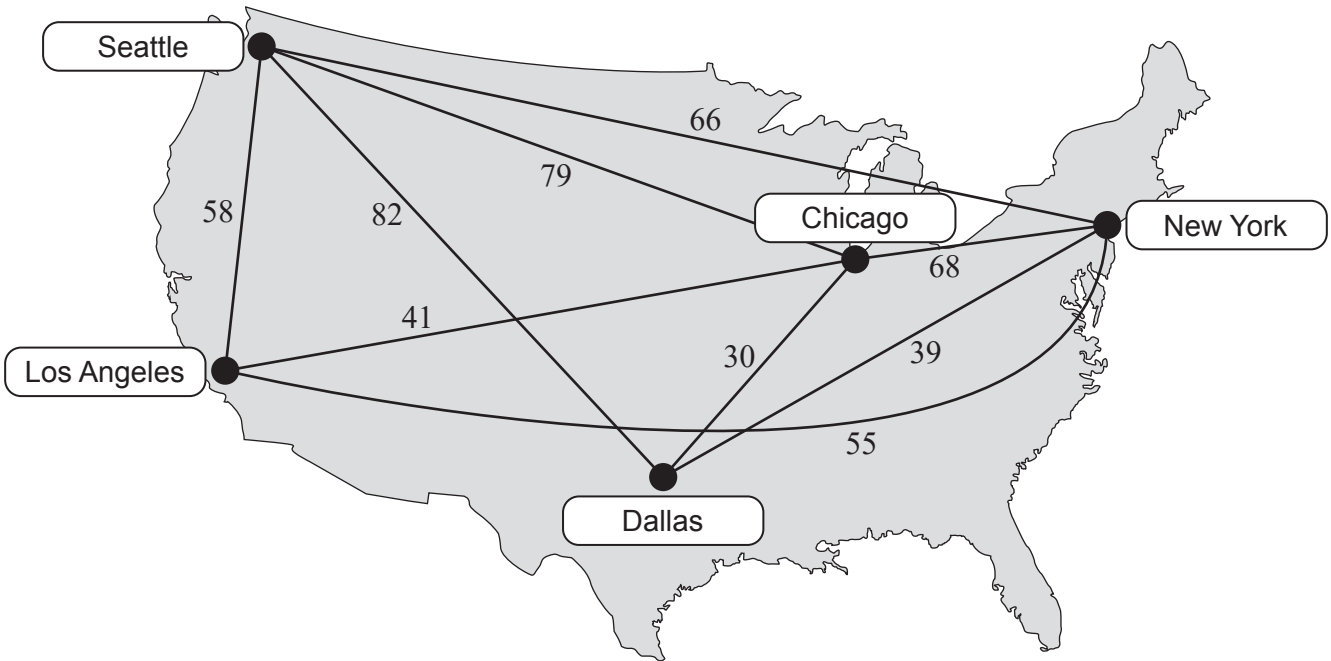
la figure n'est pas à l'échelle



- (a) Montrez que $A = 1212 - 4x - \frac{3600}{x}$. [5]
- (b) Trouvez les dimensions possibles du parc si l'aire du jardin est de 800 m^2 . [4]
- (c) Trouvez une expression pour $\frac{dA}{dx}$. [3]
- (d) Utilisez votre réponse de la partie (c) pour trouver la valeur de x qui rendra l'aire du jardin maximale. [2]
- (e) Trouvez l'aire maximale possible du jardin. [2]

4. [Note maximale : 19]

Le graphe suivant montre cinq villes des États-Unis reliées par des arêtes pondérées représentant les vols directs les moins chers, en dollars (\$), entre les villes.



(a) Expliquez pourquoi le graphe peut être décrit comme « connexe », mais pas « complet ». [2]

(b) Trouvez un arbre couvrant minimal pour le graphe en utilisant l'algorithme de Kruskal.

Indiquez clairement l'ordre dans lequel vos arêtes sont ajoutées et dessinez l'arbre obtenu. [3]

(c) En utilisant uniquement les arêtes obtenues dans votre réponse à la partie (b), trouvez une borne supérieure pour le problème du voyageur de commerce. [2]

Ronald vit à New York et souhaite voler vers chacune des autres villes, avant de finalement retourner à New York. Après quelques recherches, il découvre qu'il existe un vol direct entre Los Angeles et Dallas qui coûte 26 \$. Il met à jour le graphe pour illustrer ceci.

(d) En utilisant l'algorithme du plus proche voisin et en partant de Los Angeles, déterminez une meilleure borne supérieure que celle trouvée dans la partie (c).

Indiquez clairement l'ordre dans lequel vous ajoutez les sommets. [3]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 4)

- (e) (i) En effaçant le sommet qui représente Chicago, utilisez l'algorithme du sommet effacé pour déterminer une borne inférieure pour le problème du voyageur de commerce.
(ii) De même, en effaçant plutôt le sommet qui représente Seattle, déterminez une autre borne inférieure. [5]
- (f) À partir de là, en utilisant vos réponses précédentes, écrivez votre meilleure inégalité pour le circuit le **moins** cher que Ronald pourrait faire. Soit la variable C le coût total du circuit, en dollars. [2]
- (g) Écrivez un circuit strictement supérieur à votre borne inférieure et strictement inférieur à votre borne supérieure. [2]

5. [Note maximale : 14]

La Belgique, l'Allemagne et les Pays-Bas se rejoignent en un point unique appelé Vaalserberg.

Pour soutenir la planification future des transports, un cercle de 10 km a été tracé autour de Vaalserberg sur une carte. Une étude a été menée sur cinq ans pour déterminer quel pourcentage de personnes vivant dans chacun de ces pays (à l'intérieur de la région circulaire de 10 km) soit sont restées dans leur propre pays soit ont déménagé dans un autre pays du cercle.

À partir de cette étude, les mouvements suivants ont été observés au cours des cinq années.

- À partir de la Belgique, 5 % ont déménagé en Allemagne et 0,5 % ont déménagé aux Pays-Bas.
- À partir de l'Allemagne, 2 % ont déménagé aux Pays-Bas et 1,5 % ont déménagé en Belgique.
- À partir des Pays-Bas, 3 % ont déménagé en Allemagne et 2 % ont déménagé en Belgique.

Tout autre changement de population à l'intérieur de la région circulaire peut être ignoré.

- (a) Représentez les informations ci-dessus dans une matrice de transition T . [3]

À la fin de l'étude, la population du côté belge était de 26 000, la population du côté allemand était de 240 000 et la population du côté néerlandais était de 50 000.

- (b) En utilisant T , trouvez la population attendue du côté allemand de Vaalserberg 30 ans après la fin de l'étude. [4]

Pour la matrice T , il existe un vecteur d'état stationnaire

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

où u_1 , u_2 et u_3 correspondent respectivement aux proportions de la population totale du côté belge, du côté allemand et du côté néerlandais.

Le vecteur d'état stationnaire \mathbf{u} peut être trouvé en résolvant un système d'équations.

- (c) (i) Déterminez les équations à résoudre.
- (ii) En résolvant votre système d'équations, trouvez \mathbf{u} . [3]
- (d) Utilisez votre réponse de la partie (c)(ii) pour déterminer la population attendue à long terme du côté allemand. [2]
- (e) Suggérez deux raisons pour lesquelles il est probable que votre réponse à la partie (d) ne soit pas exacte. Vous pouvez commenter à la fois le modèle et la situation dans le contexte. [2]

6. [Note maximale : 18]

Le jardinier d'un parc local suggère que le nombre d'escargots trouvés dans le parc peut être modélisé par une distribution de Poisson.



- (a) Suggérez deux observations que le jardinier a pu faire et qui l'ont amené à proposer ce modèle. [2]

Supposons maintenant que le modèle est valide et que le nombre moyen d'escargots par m^2 est de 0,2. Le jardinier inspecte, au hasard, une zone de $12m^2$ du parc.

- (b) Trouvez la probabilité que le jardinier trouve exactement quatre escargots. [3]
- (c) Trouvez la probabilité que le jardinier trouve moins de trois escargots. [2]
- (d) Trouvez la probabilité que, lors de trois inspections consécutives, le jardinier trouve au moins un escargot par inspection. [3]

À la suite de fortes pluies pendant la nuit, le jardinier a voulu déterminer si le nombre d'escargots trouvés dans une zone aléatoire de $12m^2$ du parc avait augmenté.

- (e) Indiquez les hypothèses pour le test. [2]
- (f) Trouvez la région critique pour le test au niveau de signification de 1%. [3]
- (g) Étant donné que le nombre moyen d'escargots par m^2 est en fait passé à 0,75, trouvez la probabilité que le jardinier commette une erreur de type II. [3]

7. [Note maximale : 18]

Un biologiste suggère que les taux de variation de la population de moucheron (après un temps $t \geq 0$) dans un écosystème particulier sont donnés par les équations suivantes, où x est la population de moucheron mâles et y est la population de moucheron femelles.

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 6y$$

$$\frac{dy}{dt} = 9x - y$$

- (a) Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants à la matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}. \quad [6]$$

- (b) À partir de là, écrivez la solution générale du système, en donnant votre réponse sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\mathbf{p}_1e^{\lambda_1 t} + B\mathbf{p}_2e^{\lambda_2 t}$, où $A, B, \lambda_1, \lambda_2$ ($\lambda_2 > \lambda_1$) sont des constantes scalaires et $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ sont des constantes vectorielles. [2]

Initialement $x = 500$ et $y = 125$.

- (c) Déterminez la valeur de A et la valeur de B . [2]
- (d) Indiquez le ratio à long terme des moucheron mâles par rapport aux moucheron femelles. [1]
- (e) Trouvez la valeur de $\frac{dy}{dx}$ au temps $t = 0$. [3]
- (f) Esquissez la trajectoire, sur le portrait de phase, de la croissance de la population des moucheron. [4]

Références :